

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA  
DISCIPLINA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO 2**

**A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA  
APLICADA AO RISCO OPERACIONAL**

**BRASÍLIA  
NOVEMBRO/2008**



**ANGÉLICA GUADALUPE FURTADO  
GUSTAVO VARELA ALVARENGA**

**A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA  
APLICADA AO RISCO OPERACIONAL**

Relatório de conclusão de curso,  
apresentado à disciplina Estágio  
Supervisionado II do Curso de Estatística  
– Bacharelado do Instituto de Ciências  
Exatas da Universidade de Brasília.

Orientador: Raul Yukihiro Matsushita

**BRASÍLIA  
NOVEMBRO/2008**



*Aos amigos e familiares  
Dedicamos*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos

Amigos, pela imensa atenção e encorajamento nos momentos difíceis.

Professor Raul Matsushita, pelas valiosas sugestões, idéias e críticas.

“Homens sábios dizem, e não sem razão, que quem deseja prever o futuro deve consultar o passado.”

*Nicolau Maquiavel*

## RESUMO

Nos últimos tempos, têm-se discutido muito acerca das dificuldades para modelar dados de Risco Operacional. Bases pequenas para estimação dos quantis e carência de metodologias simples e apropriadas para a identificação de distribuições constituem fatores relevantes do problema. Atualmente, utilizam-se os testes de hipótese do tipo Kolmogorov-Smirnov para identificação (Antoniazzi, 2007). No entanto, apesar desses testes serem robustos, os critérios de escolha da melhor distribuição não estão bem definidos, além de não considerarem muito os pesos das caudas das distribuições. O mercado espera algum outro método com melhor sensibilidade e o presente trabalho sugere uma maneira descritiva para seleção da distribuição ajustada, utilizando a ferramenta da regressão não-linear para estimar os parâmetros das funções características estudadas e comparar seu ajuste com a função característica empírica.

Palavras-chaves: Função Característica Empírica, Levy, Regressão Não-Linear, Risco Operacional.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Resultado dos testes de hipótese.....	1
Quadro 2: Funções características da Gamma e da Levy Estabilizada.....	7

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: QQ-plot da Gamma para o Valor da Perda.....	1
Gráfico 2: Box-plot do valor das perdas operacionais.....	20
Gráfico 3: Histograma do Valor da Perda.....	21
Gráfico 4: Parte Real da Função Característica Empírica.....	23
Gráfico 5: Parte Imaginária da Função Característica.....	23
Gráfico 6: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Levy Estabilizada, para a parte Real.....	26
Gráfico 7: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Levy Estabilizada, para a parte Imaginária.....	26
Gráfico 8: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Gamma, para a parte Real.....	28
Gráfico 9: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Gamma, para a parte Imaginária.....	29

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS.....	3
1.1.1 Objetivo Geral.....	3
1.1.2 Objetivos Específicos.....	3
<b>2 A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA</b> .....	<b>4</b>
2.1 DEFINIÇÃO.....	4
2.2 AS DISTRIBUIÇÕES ESTUDADAS E SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.....	5
2.2.1 Gamma.....	5
2.2.2 Levy Estabilizada.....	6
2.3 QUADRO-RESUMO DAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.....	7
<b>3 A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA</b> .....	<b>8</b>
3.1 DEFINIÇÃO.....	8
<b>4 A REGRESSÃO NÃO-LINEAR UNIVARIADA</b> .....	<b>9</b>
4.1 DEFINIÇÃO.....	9
4.2 ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS NÃO-LINEARES.....	11
4.3 MÉTODOS ITERATIVOS PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS.....	11
4.4 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS INICIAIS .....	13
4.4.1 Para a Levy estabilizada.....	14
4.4.2 Para a Gamma.....	17
<b>5 APLICAÇÃO</b> .....	<b>18</b>
5.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE RISCO OPERACIONAL E SOBRE A METODOLOGIA ATUAL.....	18
5.2 SITUAÇÃO ATUAL.....	20
5.3 ESTIMANDO QUOTAS PARA COMPARAÇÃO.....	22
5.4 UTILIZANDO A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA .....	23
5.5 ESTIMANDO OS PARÂMETROS VIA REGRESSÃO NÃO-LINEAR.....	24
5.5.1 Levy estabilizada.....	24
5.5.2 Gamma.....	27
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>30</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>32</b>
<b>APENDICE A – DERIVADAS PARA A EXPANSÃO DE TAYLOR</b> .....	<b>34</b>
<b>ANEXO A – PROGRAMAÇÃO EM SAS PARA CÁLCULO DOS PARÂMETROS E AJUSTE VIA REGRESSÃO NÃO-LINEAR</b> .....	<b>36</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Risco operacional é risco de perda resultante de falhas em sistemas, de processos internos inadequados (ou deficientes), falhas devida ao capital humano ou à eventos externos. Nos últimos tempos têm-se discutido muito acerca das dificuldades para modelar esses eventos. Esses problemas incluem bases pequenas para a estimação dos quantis e a carência de metodologias simples e apropriadas para a identificação dessas distribuições.

Atualmente utilizam-se os testes do tipo Kolmogorov-Smirnov para a identificação das distribuições. Estes são inapropriados uma vez que detectam discrepâncias no centro, mas não consideram os pesos das caudas. A Tabela 1 mostra que os dados seguem uma distribuição Gamma, entretanto o Gráfico 1 mostra pontos nos quantis extremos que desclassificam essa distribuição como Gamma.

Quadro 1: Resultado dos testes de hipótese.

Distribuição	Teste	Estatística do Teste	P-valor
<b>Gamma</b>	Kolmogorov - Smirnov	0,09142196	>0,250
	Cramer-Von Mises	0,07658235	>0,250
	Anderson-Darling	0,51910548	>0,250

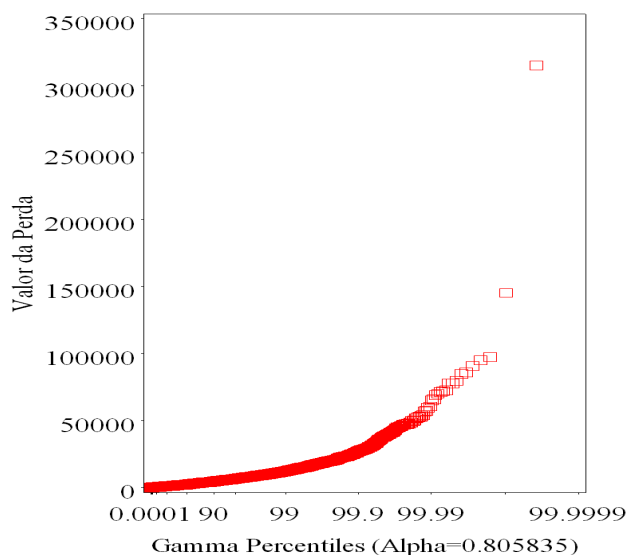


Gráfico 1: QQ-plot da Gamma para o Valor da Perda

Máxima Verossimilhança é um dos métodos de estimação mais utilizados em razão de o estimador produzido por este método ser assintoticamente eficiente sob condições de regularidade apropriadas. Para implementar este método, no entanto, a função de verossimilhança deve ter uma forma tratável. Infelizmente, existem muitos casos em finanças e economia, onde a aproximação pelo método da verossimilhança é difícil de ser implementado. Uma dessas situações ocorre quando o fenômeno segue uma distribuição de caudas pesadas.

O presente trabalho discute uma alternativa, um método que usa a função característica empírica (FCE). Iniciado por Parzen (1962), este método tem sido usado em muitas áreas tanto de inferência, quanto teste de estacionariedade e normalidade (Epps, 1987, 1988), teste de independência (Feuerverger, 1990; Hong, 1999), teste de simetria (Feuerverger e Mureika, 1977; Press, 1972) e por fim parâmetros de estimação. A principal justificativa para o uso do método da FCE é que a função característica tem correspondência de um para um com as funções de distribuição e então a FCE retém toda a informação presente na amostra. Teoricamente, entretanto, a inferência baseada na FCE pode funcionar tão bem quanto a outra baseada em uma função de distribuição empírica.

Apesar de ser bem compreendida a teoria para a FCE, no caso de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), o seu método tem recebido menos atenção, mas pode ser útil para estudos que envolvem a estimação do valor em risco (*value-at-risk* - VaR) em Risco Operacional. Além disso, pode ser empregado como método complementar para a identificação da distribuição que melhor se ajusta.

Com base no trabalho de Press (1972), que apresenta um método de momentos para a estimação pontual de parâmetros em distribuições estáveis baseadas na distribuição de Levy, aqui se propõe um método de estimação via regressão não-linear. Já que os recursos computacionais disponíveis atualmente permitem a implementação dessa técnica, ela será aplicada em um conjunto de dados de perdas de instituições financeiras e os resultados serão discutidos ao final do trabalho.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O propósito deste trabalho é discutir o método de estimação da Função Característica Empírica, comparando-o com os resultados estimados das funções características funcionais das distribuições que refletem o comportamento dos dados de Risco Operacional que são, geralmente, distribuições assimétricas à direita.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Analisar o comportamento empírico dos dados de severidade e fazer comparações entre as funções características por meio da ferramenta da regressão não-linear, de forma a minimizar problemas com os erros do tipo I ou do tipo II. A distribuição escolhida será a que possuir a menor erro quadrático médio (EQM).

Assim sendo, o trabalho fica organizado da seguinte forma:

A seção 2 deste trabalho apresenta a função característica e as distribuições que serão estudadas neste trabalho. A seção 3 trata da função característica empírica e a seção 4 define regressão não-linear e seus métodos de cálculo dos parâmetros. A seção 5, por fim, mostra a análise final de um exemplo prático e calcula o valor dos parâmetros da função característica via regressão não-linear e faz a comparação com a função característica empírica.

## 2 A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

### 2.1 DEFINIÇÃO

Seja  $X$  uma variável aleatória, com função de distribuição acumulada  $F(x)$  e função densidade de probabilidade  $f(x)$ . No caso contínuo, sua função característica pode ser definida como:

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (2.1)$$

Utilizando a transformada de Fourier de  $f(x)$ , com parâmetros  $(a, b) = (1, 1)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx \equiv \\ &\equiv 1 + it E(X^1) - \frac{t^2 E(X^2)}{2} - \frac{it^3 E(X^3)}{3!} + \frac{t^4 E(X^4)}{4!} + \dots + \frac{(it)^n E(X^n)}{n!} = \\ &\equiv \left[ 1 - \frac{t^2 E(X^2)}{2} + \frac{t^4 E(X^4)}{4!} - \dots \right] + i \left[ t E(X^1) - \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \frac{t^5 E(X^5)}{5!} - \dots \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

A partir de (2.2), pode-se dizer que a função característica é então definida por:

$$\Phi_X(t) = E[\cos(tX)] + i E[\sin(tX)] \quad (2.3)$$

com  $-\infty < t < \infty$ .

A função característica possui algumas propriedades interessantes:

1.  $|\Phi_X(t)| \leq 1$  ;
2.  $\Phi_X(0) = 1$  ; e
3.  $\Phi_X(t)$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$  .

## 2.2 AS DISTRIBUIÇÕES ESTUDADAS E SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

Para realizar esse estudo, foram escolhidas duas distribuições contínuas: Gamma e Levy Estabilizada. Essas distribuições foram escolhidas por terem funções características e porque suas funções de distribuição seguem o padrão do Risco Operacional: probabilidade alta em valores baixos e probabilidade baixa em valores extremos. Suas distribuições de probabilidade e funções características serão mostradas a seguir.

### 2.2.1 Gamma

Seja  $X$  uma variável aleatória, com  $x > 0$  e parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (com  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ). A sua função densidade de probabilidade é a seguinte:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \quad (2.4)$$

Sendo a função Gamma, definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)} e^{-x} dx \quad (2.5)$$

Por conseguinte, sua função característica pode ser escrita como:

$$\Phi_X(t) = (1 - \beta it)^{-\alpha} \quad (2.6)$$

Para realizar a separação da parte real e da parte imaginárias dessa função, será utilizada a expansão de Taylor.

Considerando a definição de Anton (2000), diz-se que se uma função  $f$  puder ser diferenciada  $k$  vezes em  $x_0$ , então define-se o polinômio de Taylor para  $f$  em torno de  $x = x_0$  como sendo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (2.7)$$

Substituindo  $f(x_0)$  por  $\Phi_x(t)$  e  $x$  por  $t$ , obtém-se:

$$\Phi_x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi_x^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k \quad (2.8)$$

Calculando-se as derivadas até  $k=20$  (arbitrário) e substituindo  $t_0=0$ , a expansão de Taylor pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) = & 1 - \frac{t^2 \Phi_x^{ii}(0)}{2!} + \frac{t^4 \Phi_x^{iv}(0)}{4!} - \frac{t^6 \Phi_x^{vi}(0)}{6!} + \frac{t^8 \Phi_x^{viii}(0)}{8!} - \frac{t^{10} \Phi_x^x(0)}{10!} \\ & + \frac{t^{12} \Phi_x^{xii}(0)}{12!} - \frac{t^{14} \Phi_x^{xiv}(0)}{14!} + \frac{t^{16} \Phi_x^{xvi}(0)}{16!} - \frac{t^{18} \Phi_x^{xviii}(0)}{18!} + \frac{t^{20} \Phi_x^{xx}(0)}{20!} \\ & + i \Phi_x^i - i \frac{t^3 \Phi_x^{iii}(0)}{3!} + i \frac{t^5 \Phi_x^v(0)}{5!} - i \frac{t^7 \Phi_x^{vii}(0)}{7!} + i \frac{t^9 \Phi_x^{ix}(0)}{9!} - i \frac{t^{11} \Phi_x^{xi}(0)}{11!} \\ & + i \frac{t^{13} \Phi_x^{xiii}(0)}{13!} - i \frac{t^{15} \Phi_x^{xv}(0)}{15!} + i \frac{t^{17} \Phi_x^{xvii}(0)}{17!} - i \frac{t^{19} \Phi_x^{xix}(0)}{19!} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os valores das derivadas de  $\Phi_x^{(k)}(0)$  encontram-se no Apêndice A.

## 2.2.2 Levy Estabilizada

A função densidade de probabilidade não é facilmente expressa analiticamente, portanto só trataremos da sua função característica. Seja  $X$  uma variável aleatória com parâmetros  $\alpha, \gamma, a, \beta$ , o parâmetro  $\alpha$  é chamado de expoente característico da lei ( $0 < \alpha \leq 2$ );  $\delta \geq 0$  é o parâmetro escalar (algumas vezes  $\gamma \equiv \delta^\alpha$  será chamado de parâmetro escalar);  $a$  é o parâmetro de local,  $-\infty < a < \infty$ ; e  $\beta$  é o parâmetro de simetria ( $-1 < \beta < 1$ , e  $\beta=0$  implica numa distribuição simétrica). Seja o log da função característica para essa variável aleatória, que segue uma lei estável, dado por

$$\ln[\Phi_x(t)] = iat - |t\delta|^\alpha \left[ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right] \quad (2.10)$$

onde:

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \left(\frac{2}{\pi}\right) \log|t|, & \alpha = 1 \end{cases} \text{ e } \frac{t}{|t|} \equiv 0 \text{ em } t=0.$$

Aplicando o exponencial e separando a parte real da imaginária em (2.10), tem-se:

$$\Phi_x(t) = \exp(-|t\delta|)^\alpha \left[ \cos\left(at - \beta \frac{t}{|t|} |t\delta|^\alpha \omega(t, \alpha)\right) + i \sin\left(at - \beta \frac{t}{|t|} |t\delta|^\alpha \omega(t, \alpha)\right) \right] \quad (2.11)$$

### 2.3 QUADRO-RESUMO DAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

Quadro 2: Funções características da Gamma e da Levy Estabilizada.

Distribuição	Função característica
<b>Gamma</b>	$1 - \frac{t^2 \Phi_x^{ii}(0)}{2!} + \frac{t^4 \Phi_x^{iv}(0)}{4!} - \frac{t^6 \Phi_x^{vi}(0)}{6!} + \frac{t^8 \Phi_x^{viii}(0)}{8!} - \frac{t^{10} \Phi_x^x(0)}{10!}$ $+ \frac{t^{12} \Phi_x^{xii}(0)}{12!} - \frac{t^{14} \Phi_x^{xiv}(0)}{14!} + \frac{t^{16} \Phi_x^{xvi}(0)}{16!} - \frac{t^{18} \Phi_x^{xviii}(0)}{18!} + \frac{t^{20} \Phi_x^{xx}(0)}{20!}$ $+ i \Phi_x^i - i \frac{t^3 \Phi_x^{iii}(0)}{3!} + i \frac{t^5 \Phi_x^v(0)}{5!} - i \frac{t^7 \Phi_x^{vii}(0)}{7!} + i \frac{t^9 \Phi_x^{ix}(0)}{9!} - i \frac{t^{11} \Phi_x^{xi}(0)}{11!}$ $+ i \frac{t^{13} \Phi_x^{xiii}(0)}{13!} - i \frac{t^{15} \Phi_x^{xv}(0)}{15!} + i \frac{t^{17} \Phi_x^{xvii}(0)}{17!} - i \frac{t^{19} \Phi_x^{xix}(0)}{19!}$
<b>Levy Estabilizada</b>	$\exp(- t\delta )^\alpha \left[ \cos\left(at - \beta \frac{t}{ t }  t\delta ^\alpha \omega(t, \alpha)\right) + i \sin\left(at - \beta \frac{t}{ t }  t\delta ^\alpha \omega(t, \alpha)\right) \right]$

### 3 A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA

#### 3.1 DEFINIÇÃO

Para estimar uma função de distribuição de dados empiricamente obtidos,  $F(x)$ , pode-se usar a Função de Distribuição Empírica definida por:

$$F_N(x) = \frac{N(x)}{N} \quad (3.1)$$

Sendo  $N(x)$  a quantidade de vezes que  $X$  assume um valor  $X_i \leq x$ , ( $1 \leq i \leq N$ ), com  $N$  representando o número total de observações.

Uma maneira de estudar a distribuição de uma variável aleatória é utilizar a função característica. A partir das definições (2.3) e (3.1), define-se a Função Característica Empírica (FCE) como a média, em  $N$ , da variável aleatória  $e^{itX}$ , podendo ser escrita como:

$$\phi_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(tX_i) + \frac{i}{N} \sum_{i=1}^N \sin(tX_i) \quad (3.2)$$

Sua aplicação será dada na seção 5.4.

## 4 A REGRESSÃO NÃO-LINEAR UNIVARIADA

### 4.1 DEFINIÇÃO

Segundo Gallant (1987) e Souza (1998), uma das situações mais comuns em análise estatística é aquela na qual os dados consistem de respostas univariadas  $y_t$ . Essas respostas, em diversos casos, obedecem ao seguinte modelo de regressão não-linear

$$y_t = f(x_t, \theta^\circ) + e_t \quad t=1, \dots, n \quad (4.1)$$

Onde a função resposta  $f(x_t, \theta^\circ)$  tem forma funcional conhecida,  $x_t$  é um vetor k-dimensional formado por observações em variáveis exógenas,  $\theta^\circ \in \Theta$  é um parâmetro p-dimensional e  $e_t$  é um erro experimental não observável diretamente. Considere, também, que  $Y$  tem componentes  $y_t$ ,  $f(\theta)$  tem componentes  $f(x_t, \theta^\circ)$  e  $e$  tem componentes  $e_t$ . Chame de  $F(\theta)$  a matriz jacobiana de  $f(\theta)$  e  $F = F(\theta^\circ)$ . Sendo assim, pode-se reescrever o modelo (4.1) como

$$Y = f(\theta^\circ) + e \quad (4.2)$$

A validade das inferências feitas nesse modelo está condicionada à presença de condições de regularidade, enumeradas a seguir (Souza, 1998):

1. Regularidade dos Resíduos:

Os resíduos  $e_t$  são i.i.d.  $N(0, \sigma^2)$ .

2. Compacidade do Espaço Paramétrico:

O parâmetro  $\theta^\circ$  é um ponto interior do espaço paramétrico  $\Theta$ . O subconjunto p-dimensional  $\Theta$  é compacto.

3. Somabilidade das Variáveis Exógenas:

A análise é condicional à seqüência de vetores k-dimensionais  $x_t$ . Esta seqüência representa uma realização particular de um processo estocástico. O

processo tem a propriedade da somabilidade quando se enquadra em uma das condições seguintes:

- a)  $x_t$  é obtida por amostragem aleatória de uma distribuição de probabilidades em  $\mathbb{R}^k$ .
- b)  $x_t$  é obtida pela repetição de um número finito de pontos. Nesse caso existem  $M$  pontos  $a_0, \dots, a_{M-1}$  em  $\mathbb{R}^k$  tais que  $x_t = a_{(t-1) \bmod M}$ .
- c) Misturas dos casos anteriores, i.e, quando algumas componentes de  $x_t$  são geradas de uma distribuição e as restantes são obtidas por repetição de um número finito de pontos.

#### 5. Suavidade da Função Resposta:

A função resposta  $f(x, \theta)$  e suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \quad (4.3) \text{ e } \frac{\partial^2 f(x, \theta)}{\partial \theta_i \theta_j} \quad (4.4)$$

são contínuas em  $(x, \theta)$ .

#### 6. Identificação:

O limite

$$S(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (f(x, \theta) - f(x_t, \theta^o))^2 \quad (4.5)$$

existe e tem mínimo único em  $\theta = \theta^o$ .

#### 7. Condição de Posto:

Seja  $F(\theta)$  a matriz  $n \times p$  cuja  $t$ -ésima linha é  $\partial f(x, \theta_t) / \partial \theta'$ . O limite

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F'(\theta^o) F(\theta^o) \quad (4.6)$$

existe e tem posto  $p$ .

## 4.2 ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS NÃO-LINEARES

Considerando (4.2), o estimador de mínimos quadrados de  $\theta^o$  é obtido mediante a pesquisa do mínimo (em  $\theta$ ) da soma de quadrados residuais. Escrevendo explicitamente:

$$\begin{aligned}SSE(\theta) &= \sum_{t=1}^n (y_t - f(x_t, \theta))^2 \\ &= (Y - f(\theta))'(Y - f(\theta)) \quad (4.7)\end{aligned}$$

O estimador de mínimos quadrados  $\hat{\theta}$  deve ser tal que

$$\frac{\partial SSE(\theta)}{\partial(\theta)} = 0 \quad (4.8)$$

## 4.3 MÉTODOS ITERATIVOS PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS

Os métodos mais comuns de se calcular os estimadores de mínimos quadrados não-lineares são: o método de Gauss-Newton modificado (Hartley, 1961) e o algoritmo de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963).

Para o método de Gauss-Newton, considere uma estimativa inicial  $\theta^o$  para  $\theta$  e seja a expansão de Taylor de primeira ordem

$$f(x_t, \theta) = f(x_t, \hat{\theta}_0) + \frac{\partial f(x_t, \hat{\theta}_0)}{\partial \theta'} (\theta - \hat{\theta}_0) \quad (4.9)$$

Essa expansão na vizinhança  $f(\theta)$  produz a aproximação linear

$$f(\theta) \approx f(\hat{\theta}_0) + F(\hat{\theta}_0)(\theta - \hat{\theta}_0) \quad (4.10)$$

O método de Gauss-Newton baseia-se na substituição da aproximação acima (5.5) na equação do  $SSE(\theta)$  e minimizar (em  $\theta$ ) a seguinte equação

$$SSE(\theta) = (Y - f(\hat{\theta}_0) - F(\hat{\theta}_0)(\theta - \hat{\theta}_0))' (Y - f(\hat{\theta}_0) - F(\hat{\theta}_0)(\theta - \hat{\theta}_0)) \quad (4.11)$$

De uma forma genérica, (4.11) pode ser reescrita como

$$SSE_{i+1}(\theta) = (Y - f(\hat{\theta}_i) - F(\hat{\theta}_i)(\theta - \hat{\theta}_i))' (Y - f(\hat{\theta}_i) - F(\hat{\theta}_i)(\theta - \hat{\theta}_i)) \quad i=0,1,2,\dots \quad (4.12)$$

Tem-se que a equação (4.12) tem mínimo em

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{i+1} &= \hat{\theta}_i + (F'(\hat{\theta}_i)F(\hat{\theta}_i))^{-1} F'(\hat{\theta}_i)(Y - f(\hat{\theta}_i)) \\ &= \hat{\theta}_i + d_i \quad (4.13) \end{aligned}$$

onde  $d_i$  é denominado de passo de Gauss-Newton.

Pode-se esperar que  $\hat{\theta}_{i+1}$  seja uma melhor aproximação para o estimador de mínimos quadrados de  $\hat{\theta}$  do que  $\hat{\theta}_i$ , no sentido de que  $SSE(\hat{\theta}_{i+1}) < SSE(\hat{\theta}_i)$  e que o processo é convergente. Entretanto, não é sempre que  $\hat{\theta}_{i+1}$  aproxima-se mais de  $\hat{\theta}$  que  $\hat{\theta}_i$ , de modo que  $SSE(\hat{\theta}_{i+1}) \leq SSE(\hat{\theta}_i)$ . Esse fato motivou a modificação do método de Gauss-Newton feita por Hartley, onde escolhe-se um  $\lambda^*$ , no intervalo (0,1], tal que todos os pontos da forma  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_i + \lambda(\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i)$ , com  $0 < \lambda < \lambda^*$ , satisfazem  $SSE(\theta) < SSE(\hat{\theta}_i)$ . O método mais simples e, quase sempre, mais adequado na prática de se escolher  $\lambda_i$  é o definido por Gallant (1987) onde, para cada  $i$ , um  $\lambda$  será escolhido na seqüência 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6; 0.5; 0.25; 0.125;..., satisfazendo  $SSE(\hat{\theta}_i + \lambda d_i) < SSE(\hat{\theta}_i)$ .

Considerando isso, o algoritmo de Gauss-Newton modificado é o seguinte:

1. Escolha  $\hat{\theta}_0$ , como estimativa inicial, e ache um  $\lambda_0$  entre 0 e 1 tal que  $SSE(\hat{\theta}_0 + \lambda_0 d_0) < SSE(\hat{\theta}_0)$ ;
2. Faça  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 + \lambda_0 d_0$  e calcule o passo de Gauss-Newton  $d_1$  associado a  $\hat{\theta}_1$ . Ache um  $\lambda_1$  em (0,1] tal que  $SSE(\hat{\theta}_1 + \lambda_1 d_1) < SSE(\hat{\theta}_1)$ ;

3. Faça  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 + \lambda_1 d_1$  e prossiga o processo até que, simultaneamente,  $\|\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{i+1}\| < \eta(|\theta_i| + \tau)$  e  $|SSE(\hat{\theta}_i) - SSE(\hat{\theta}_{i+1})| < \eta(SSE(\hat{\theta}_i) + \tau)$ , sendo  $\eta$  e  $\tau$  níveis de tolerância, geralmente iguais a  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$ , respectivamente.

O algoritmo de Levenberg-Marquardt é, basicamente, o mesmo. Sua diferença é no passo  $d_i$ , uma vez que ele é definido como:

$$d_i = (F'(\hat{\theta}_i)F(\hat{\theta}_i) + \lambda \text{diag}(F'(\hat{\theta}_i)F(\hat{\theta}_i)))^{-1} F'(\hat{\theta}_i)(Y - f(\hat{\theta}_i)) \quad (4.14)$$

Inicialmente, define-se  $\lambda_i$  como sendo um valor muito pequeno (i.e. 1E-6) e a cada iteração, a SSE é avaliada nos parâmetros modificados por  $d_i$ . Se não convergir, verifique a SSE. Se  $SSE(\hat{\theta}_i + d_i) < SSE(\hat{\theta}_i)$ , então  $\lambda_{i+1} = \lambda_i / 10$ . Por outro lado, se  $SSE(\hat{\theta}_i + d_i) > SSE(\hat{\theta}_i)$ , então  $\lambda_{i+1} = 10\lambda_i$ . Repetir este procedimento até convergir (o critério de convergência anterior serve para este caso, também).

Utilizar o método de Levenberg-Marquardt é útil quando as estimativas dos parâmetros são altamente correlacionadas ou quando a função objetivo não é bem ajustada por uma forma quadrática.

Visto isso, a escolha do modelo apropriado será baseada naquele que obtiver menor EQM (erro quadrático médio) e, também, possuir o maior valor para a bondade do ajustamento (*goodness of fit*), dado que essa bondade pode ser obtida da seguinte forma:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE(\hat{\theta})}{SST(\hat{\theta})} \quad (4.15)$$

onde SST é a soma de quadrados total corrigida pela média.

#### 4.4 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS INICIAIS

Souza (1998), atenta para o alerta de Gallant, que diz respeito à determinação dos valores iniciais  $\hat{\theta}$ , que no caso deste estudo significa dizer  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{a}, \hat{\gamma}$ :

O sucesso, em termos de convergência para  $\hat{\theta}$ , não é garantido por qualquer método. A experiência indica que falha no processo de convergência (se não erramos nas derivadas!) depende da distância do valor inicial à resposta correta, e do grau de parametrização da função resposta relativamente ao conjunto de dados utilizado. Estes problemas estão interrelacionados no sentido de que as funções respostas mais apropriadas conduzem a uma amplitude maior do raio de convergência (no espaço paramétrico). Quando a convergência não ocorre, deve-se tentar encontrar valores iniciais melhores (mais próximos de  $\hat{\theta}$ ) ou utilizar uma função resposta mais parcimoniosa (com menos parâmetros). (GALLANT, 1987, pg.39).

Para a estimação destes valores iniciais, será utilizado o método dos momentos.

#### 4.4.1 Para A Levy Estabilizada

Distribuições estáveis são interessantes para diversas aplicações. Por exemplo, elas foram aplicadas em astronomia para modelar campos gravitacionais, e também foram sugeridas em negócios e economia para fornecer um modelo para as leis de probabilidade que regem as variações de preço de títulos especulativos. Neste trabalho, a função Levy apresentada na seção 2.2.2 foi escolhida por lidar bem com caudas pesadas, que é objeto de grande preocupação no contexto de Risco Operacional. Portanto, para as próximas etapas, considere a fórmula dada em (2.7).

Deseja-se estimar os quatro parâmetros  $(a, \beta, \alpha, \gamma)$  para aplicar como uma estimativa inicial aos métodos iterativos apresentados anteriormente. Para isso, considere a função característica amostral de  $\hat{\Phi}(t)$  dada por

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ity_j} \quad (4.16).$$

Desta forma,  $\hat{\Phi}(t)$  é calculável para todos os valores de  $t$ . Note que  $\{\hat{\Phi}(t), -\infty < t < \infty\}$  é um processo estocástico e, para cada  $t$ ,  $|\hat{\Phi}(t)|$  é limitada acima por 1. Portanto, todos os momentos de  $\hat{\Phi}(t)$  são finitos, e  $\hat{\Phi}(t)$ , para um  $t$  fixo, é a média amostral de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Assim, pela lei dos grandes números,  $\hat{\Phi}(t)$  é um estimador consistente de  $\Phi(t)$ .

Um processo de estimação analítico que fornece estimadores explícitos e envolve pouca computação é uma versão do método dos momentos.

A partir de (2.7), para todo  $\alpha$ ,

$$|\Phi(t)| = e^{-\gamma|t|^\alpha} \quad (4.17)$$

Portanto,  $\gamma|t|^\alpha = -\log|\Phi(t)|$ . Escolhem-se dois valores diferentes de zero para  $t$ ; por exemplo,  $t_1$  e  $t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$ . Presuma  $\alpha \neq 1$ . Então,

$$\gamma|t_1|^\alpha = -\log|\Phi(t_1)|, \quad \gamma|t_2|^\alpha = -\log|\Phi(t_2)|$$

Resolvendo essas duas equações simultaneamente para  $\alpha$  e  $\gamma$ , e substituindo  $\Phi(t)$  por seus valores estimados, tem-se

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \left| \frac{\log|\hat{\Phi}(t_1)|}{\log|\hat{\Phi}(t_2)|} \right|}{\log|t_1/t_2|} \quad (4.18)$$

e

$$\log \hat{\gamma} = \frac{\log|t_1| \log[-\log|\hat{\Phi}(t_2)|] - \log|t_2| \log[-\log|\hat{\Phi}(t_1)|]}{\log|t_1/t_2|} \quad (4.19)$$

Para estimar  $\beta$  e  $a$ , defina  $u(t) = \text{Im}[\log \Phi(t)]$ , onde  $\text{Im}[\Psi(t)]$  estipula a parte imaginária de qualquer função com valores complexos  $\Psi(t)$ . Então, a partir de (2.7),

$$u(t) = at - \gamma|t|^{\alpha-1} \beta t \omega(t, a).$$

Escolha dois valores diferentes<sup>1</sup> para  $t$ ; por exemplo,  $t_3$  e  $t_4$ ,  $t_3 \neq t_4$ . Então para  $\alpha \neq 1$ ,

$$a - \gamma \beta |t_k|^{\alpha-1} \tan \frac{\pi a}{2} = \frac{u(t_k)}{t_k}, \quad k=3,4. \quad (4.19)$$

Uma vez que

<sup>1</sup> Podem ser os mesmos pares de valores de  $t_1$  e  $t_2$ , os valores que são usados para estimar  $\alpha$  e  $\gamma$  também irão estimar bem  $a$  e  $\beta$ . Entretanto, essa questão requer mais estudo.

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(ty_j) + i \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(ty_j) \right] ,$$

em coordenadas polares é

$$\hat{\Phi}(t) \equiv \rho(t) \exp[i\theta(t)] ,$$

onde

$$\rho^2(t) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(ty_j) \right]^2 + \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(ty_j) \right]^2 \quad \text{e} \quad \tan \theta(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \sin(ty_j)}{\sum_{j=1}^n \cos(ty_j)} .$$

Portanto,  $\log \hat{\Phi}(t) = \rho(t) + i\theta(t)$  ,  $\hat{u}(t) = \text{Im}[\log \hat{\Phi}(t)] = \theta(t)$  .

Escolha os valores mais significativos de  $\log \hat{\Phi}(t_k)$  ,  $k=3,4$  . Isto é, usando os valores mais importantes, para  $t=t_3, t_4$  ,

$$\hat{u}(t) = \arctan \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \sin(ty_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(ty_i)} \right] \quad (4.20)$$

Substituindo  $u(t)$  em (4.19) pelo seu valor estimado, dado em (4.20), e resolvendo as duas equações lineares implícitas simultaneamente para  $\beta$  e  $a$  tem-se os estimadores

$$\hat{\beta} = \frac{\left| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} \right|}{\left| |t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \right| \hat{y} \tan \frac{\pi \hat{\alpha}}{2}} \quad (4.21)$$

e

$$\hat{\alpha} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}} \quad (4.22)$$

Os estimadores dados em (4.21) e (4.22) são consistentes, uma vez que eles são baseados em  $\hat{\phi}(t)$ , que é consistente. Entretanto, a taxa de convergência para os valores populacionais irão variar, dependendo das escolhas de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$ . As escolhas ótimas dos  $t_j$ 's necessitam de estudo mais aprofundado. Nesse estudo, os valores de  $t_j$  foram escolhidos graficamente, buscando valores que fornecessem a forma da distribuição.

#### 4.4.2 Para A Gamma

Seja a função dada em (2.4), os estimadores fornecidos pelo método dos momentos para  $\alpha$  e  $\beta$  são:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{\bar{x}}{s} \right)^2 \quad (4.23)$$

$$\hat{\beta} = \frac{s^2}{\bar{x}} \quad (4.24)$$

onde  $\bar{x}$  é a média amostral e  $s^2$  é a variância amostral de (3.2), em t.

## 5 APLICAÇÃO

### 5.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE RISCO OPERACIONAL E SOBRE A METODOLOGIA ATUAL

Em 1988, foi criado o Comitê da Basileia e publicado o Acordo de Basileia, que serviria como guia para validação e oficialização de técnicas para mensuração dos riscos de crédito e de mercado. Com isso, os bancos se tornaram capazes de avaliar esses riscos e puderam reservar um capital mínimo para fazer frente a eles. No entanto, ainda perdiam somas substanciais de capital devido às perdas operacionais. Como exemplo, tem-se a desastrosa perda de quase 2 bilhões de dólares do Banco Barings em 1995, por razão de operações não-autorizadas, e outra perda mais recente de, aproximadamente, 140 milhões de dólares do Banco de Nova York, devido aos ataques de 11 de setembro de 2001.

Além dessas perdas substanciais, a rápida mudança nos sistemas tecnológicos, a globalização e novas técnicas de quantificação tornaram necessária uma revisão do Acordo de 1988 e, assim, o Comitê da Basileia reuniu-se novamente em 2004 para criar o Novo Acordo de Capital, ou Basileia II.

O Risco Operacional foi incluído nesse novo acordo e tem a sua definição dada por: risco de perda resultante de falhas em sistemas, processos internos inadequados (ou deficientes), pessoas ou eventos externos.

No Basileia II, foi criada uma estrutura de gerenciamento de riscos baseada em 3 pilares:

- i. Requerimento de Capital;
- ii. Processo de Supervisão Bancária; e
- iii. Disciplina de Mercado ou Transparência.

O presente trabalho foca-se no primeiro pilar, Requerimento de Capital, isto é, o capital mínimo para fazer frente ao risco e, mais especificamente, na melhoria da metodologia avançada definida por Basiléia II.

Essa metodologia avançada, ou AMA (método de mensuração avançado), exige que os bancos possuam sistemas, modelos e critérios internos para o cálculo do capital requerido. Essa exigência baseia-se no fato de que quanto mais avançada é uma metodologia, mais precisa ela é, logo, o requerimento de capital é menor. Assim, os bancos devem possuir um grande controle sobre seus sistemas e modelos para que possam realizar os cálculos do capital requerido.

Dentro do AMA há uma metodologia bastante difundida chamada LDA (Loss Distribution Approach – Método de Distribuição de Perdas) que considera, em sua modelagem, dois conceitos: frequência e severidade.

Frequência, na metodologia LDA, é considerada como o número de ocorrências de perda num determinado período de leitura dos dados (ano, mês, dia, etc.), e severidade é o valor de cada perda. Essa metodologia supõe as hipóteses de que as frequências, assim como as severidades, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e, ainda, independentes entre si.

A partir dessas definições e suposições, são feitos os testes de hipóteses (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Cramer-Von Mises) e, a partir do resultado do p-valor e das estatísticas do teste, a melhor distribuição é escolhida. Com base nos parâmetros das distribuições de frequência e severidade escolhidas, é feita uma convolução por simulação de Monte Carlo que fornece a função de distribuição conjunta. Isso possibilitará o cálculo do quantil de 99,9%. Esse determinado quantil é calculado de acordo com exigência de Basiléia II e é conhecido, em Risco Operacional, como VaR e representa a quantia de capital requerida para uma instituição fazer frente a um determinado risco (Antoniuzzi, 2007).

Apesar desses testes serem robustos, eles controlam apenas o erro do tipo I – probabilidade de rejeitar a hipótese nula, dado que ela é verdadeira – desconsiderando o erro do tipo II, conforme Antoniuzzi:

Contudo, utiliza-se desses testes para tomar decisões do tipo II, ou seja, para aceitar a

hipótese nula e caso aceitemos a hipótese nula para mais de uma distribuição, a escolha do modelo é feita para a distribuição que minimiza a estatística do teste ou, equivalentemente, maximiza seu p-valor.

Ora, se o teste que utilizamos não controla a probabilidade de erro inerente à decisão tomada, podemos estar tomando uma decisão equivocada sem sabermos sequer quais as chances de isso ocorrer. (ANTONIAZZI, 2007, pg.17).

Outra limitação dos testes inferenciais é que eles dão mais ênfase na explicação da parte central da distribuição, no corpo, ou seja, onde há maior concentração de dados. Assim sendo, valores caudais, ou seja, valores extremos e menos freqüentes, são pouco explorados. Como o principal objeto do Risco Operacional são dados de grandes perdas, deseja-se desenvolver, neste trabalho, um método descritivo para estimar os quantis superiores.

## 5.2 SITUAÇÃO ATUAL

Os dados utilizados neste trabalho referem-se às perdas de um evento de risco operacional, no período de 4 anos. Seja  $X$  a variável aleatória valor da perda desse evento operacional, a base consiste em 169.219 observações e o valor médio de perda é R\$ 1.902,46, com um desvio-padrão grande de R\$ 2.877,36. O valor mínimo de perda é da ordem de R\$ 0,01 e o máximo é de R\$ 315.392,83. Esses valores são evidenciados no box-plot abaixo.

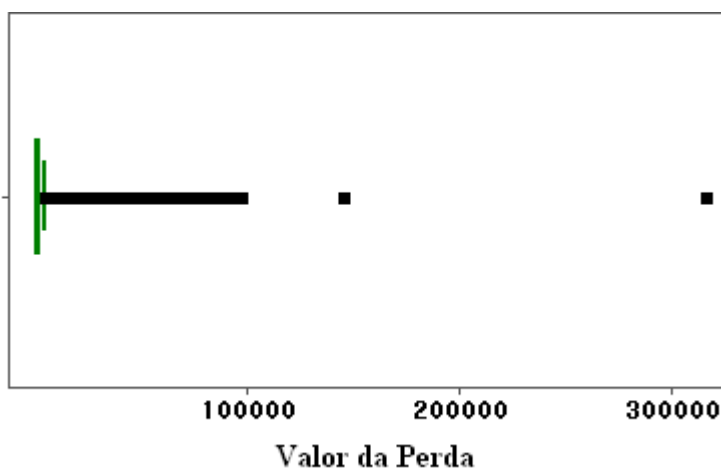


Gráfico 2: Box-plot do valor das perdas operacionais

Outra fato que vê-se no box-plot é a presença de *outliers*, sendo o mais evidente o valor acima de R\$ 300.000 e um outro, mais próximo da distribuição, com valor em torno de R\$ 150.000. Pode-se reduzir a distância desses *outliers* ao se calcular o logaritmo dos dados, entretanto esta não é uma possibilidade viável, uma vez que o objetivo é analisar o comportamento das caudas.

Confirmando o que foi visto, o histograma a seguir mostra que as maiores freqüências ocorrem em severidades baixas, enquanto que os maiores valores ocorrem raramente, caracterizando um evento de risco operacional.

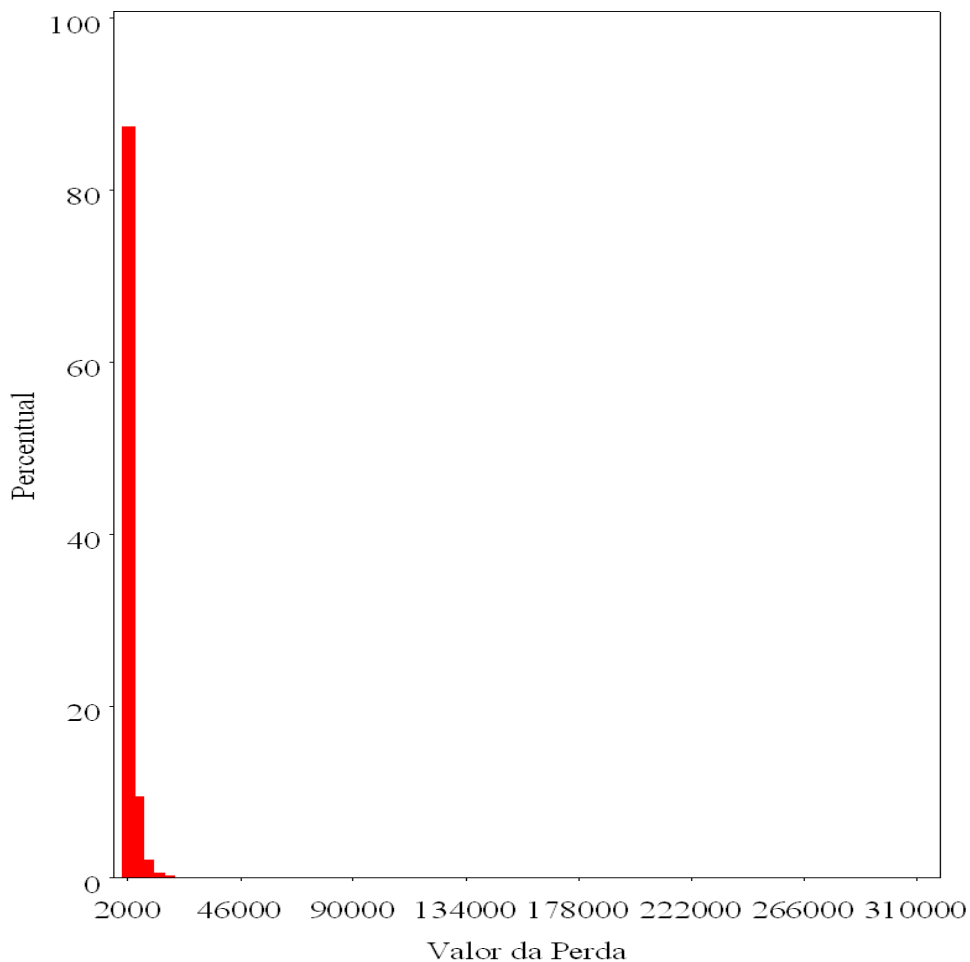


Gráfico 3: Histograma do Valor da Perda

### 5.3 ESTIMANDO QUOTAS PARA COMPARAÇÃO

Uma forma de estimar quotas para essas perdas é usar a desigualdade de Tchebysheff, definida como:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (5.1)$$

Um intervalo para  $X$  pode ser definido como:

$$X \in (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) \quad (5.2)$$

Onde  $X$  é uma variável aleatória,  $\mu$  é a média da distribuição dessa probabilidade,  $\sigma$  é seu desvio-padrão e  $k$  é um valor real e  $k \geq 1$ . Pode-se dizer que (5.1) possui dois aspectos importantes: o resultado aplica-se para qualquer distribuição de probabilidade e o resultado é muito conservador, no sentido de que a probabilidade real da perda estar num intervalo do tipo  $\mu \mp \sigma k$  excede, normalmente, a quota inferior para a probabilidade  $(1 - 1/k^2)$  em um valor considerável, ou seja, a desigualdade superestima muito a probabilidade na cauda.

Mesmo superestimado, esse resultado serve para efeito de comparação, onde o valor final calculado não deve ser menor que quota inferior. Com os dados da presente base, utilizando (5.2) e  $k \approx 32$ , pois a probabilidade desejada é de 99,9%, tem-se que as quotas para o valor de perda,  $X$ , são:

$$X \in (\mp 90.173,06)$$

Logo, o cálculo do quantil 99,9 não deve ser inferior à -90.173,06, o que é inviável, pois não há perda negativa, confirmando que (5.1) superestima os valores. Porém, essa desigualdade não deve ser completamente descartada uma vez que, em um evento com menor desvio-padrão e menores valores discrepantes, ela pode fornecer uma boa estimativa para a quota inferior.

## 5.4 UTILIZANDO A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA

O objetivo dessa parte inicial é analisar como os dados se comportam e qual a aparência da sua função característica. Aplicando a fórmula (3.2), dentro de um intervalo  $-0.003 \leq t \leq 0.003$ , com divisões 0.0001, os seguintes gráficos foram obtidos:

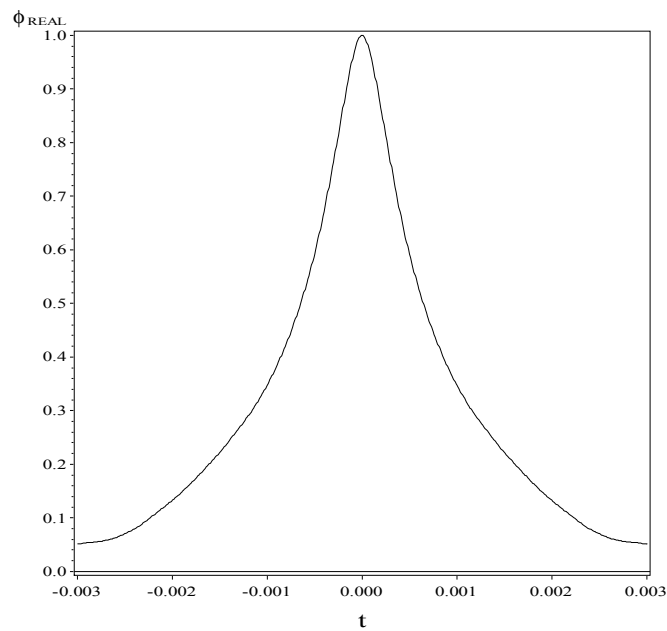


Gráfico 4: Parte Real da Função Característica Empírica

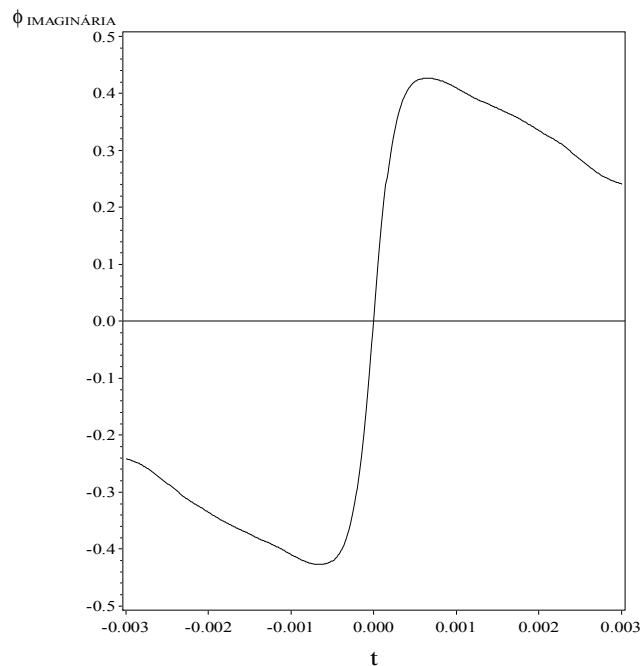


Gráfico 5: Parte Imaginária da Função Característica

Esses gráficos possuem funções bem definidas e espera-se que os gráficos das funções características das distribuições Levy Estabilizada e Gamma, com parâmetros estimados via regressão-não linear, se assemelhem à eles.

## 5.5 ESTIMANDO OS PARÂMETROS VIA REGRESSÃO NÃO-LINEAR

Para iniciar o procedimento de estimação dos parâmetros, é necessária uma estimativa inicial para que os processos iterativos tenham início. Uma maneira de se obter esses parâmetros foi explicitada na seção 4.4. Entretanto, a função característica empírica é complexa, pois pode ser expressa em função de uma parte real e uma parte imaginária. Por isso, para as estimativas iniciais, foram utilizados os valores da parte imaginária da função. Acredita-se que isso não irá trazer problemas no valor das estimativas finais porque o procedimento utilizado no SAS, PROC MODEL, fornecerá tanto para a parte real e quanto para a parte imaginária um único valor para os parâmetros.

### 5.5.1 Levy Estabilizada

Com os valores de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$  escolhidos arbitrariamente através do gráfico, de forma a identificar melhor o comportamento da distribuição Levy e utilizando as fórmulas (4.18), (4.19), (4.21) e (4.22) espera-se encontrar bons valores iniciais para a estimação dos parâmetros. Como as funções seno e cosseno são simétricas, foram escolhidos apenas valores positivos para  $t_i$ . Os valores escolhidos foram:  $t_1=0.0001$ ,  $t_2=0.001$ ,  $t_3=0.0015$  e  $t_4=0.0025$  e, com eles, os seguintes resultados foram obtidos:

$$\hat{\alpha} = -0.293591988 ;$$

$$\hat{\gamma} = 0.117463439478 ;$$

$$\hat{\beta} = -1.250852542 ;$$

$$\hat{a} = 361.3981857 .$$

Note que, ao fazer os cálculos somente com a parte imaginária da função, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  ficam fora dos limites estabelecidos anteriormente -  $0 < \alpha \leq 2$  e  $-1 \leq \beta \leq 1$  - mas acredita-se que irão convergir para algum valor dentro destes intervalos.

Utilizando o PROC MODEL (a programação encontra-se no Anexo A)

Nonlinear OLS Summary of Residual Errors							
Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-Square	Adj R-Sq
real	1.5	298.5	0.1106	0.000371	0.0193	0.9947	0.9947
imag	1.5	298.5	0.1097	0.000367	0.0192	0.9344	0.9343

Nonlinear OLS Parameter Estimates	
Parameter	Estimate
<b>beta</b>	-1
<b>a</b>	-1429.71
<b>alpha</b>	0.838855
<b>delta</b>	532.3561

O critério de convergência da ordem de 0.00001 foi obtido na iteração 127 do método de Gauss-Newton. Todos os valores encontram-se nos limites estabelecidos e o valor de  $\gamma$  pode ser obtido da forma  $\gamma \equiv \delta^\alpha$ , logo  $\hat{\gamma} = 193.592431997$ .

A partir dos valores estimados, ajusta-se a distribuição Levy Estabilizada e compara-se com a distribuição dada pela função característica empírica. Os gráficos comparativos entre essas distribuições, tanto para a parte real, quanto para a imaginária são os seguintes:

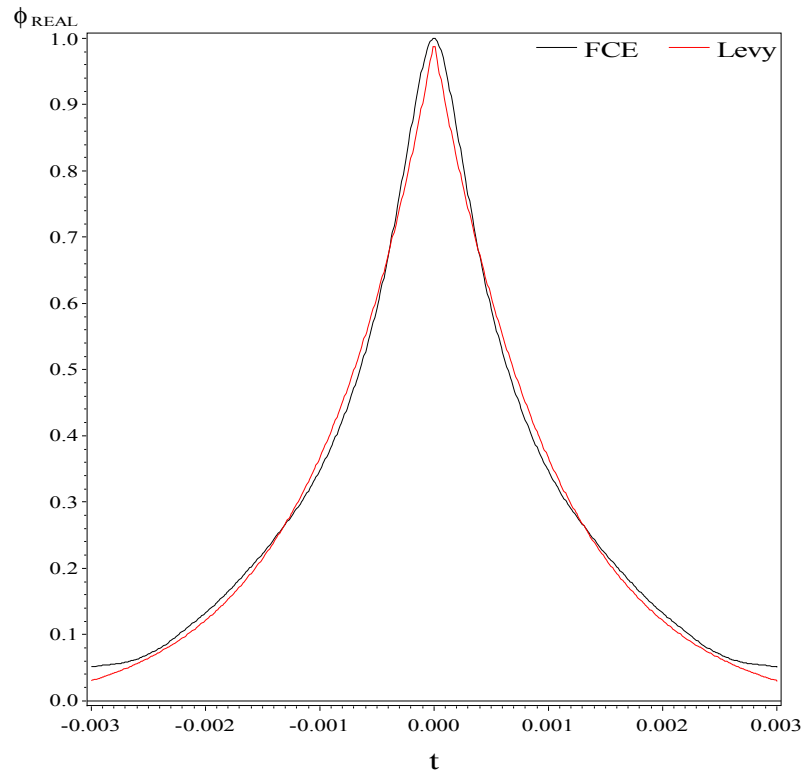


Gráfico 6: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Levy Estabilizada, para a parte Real

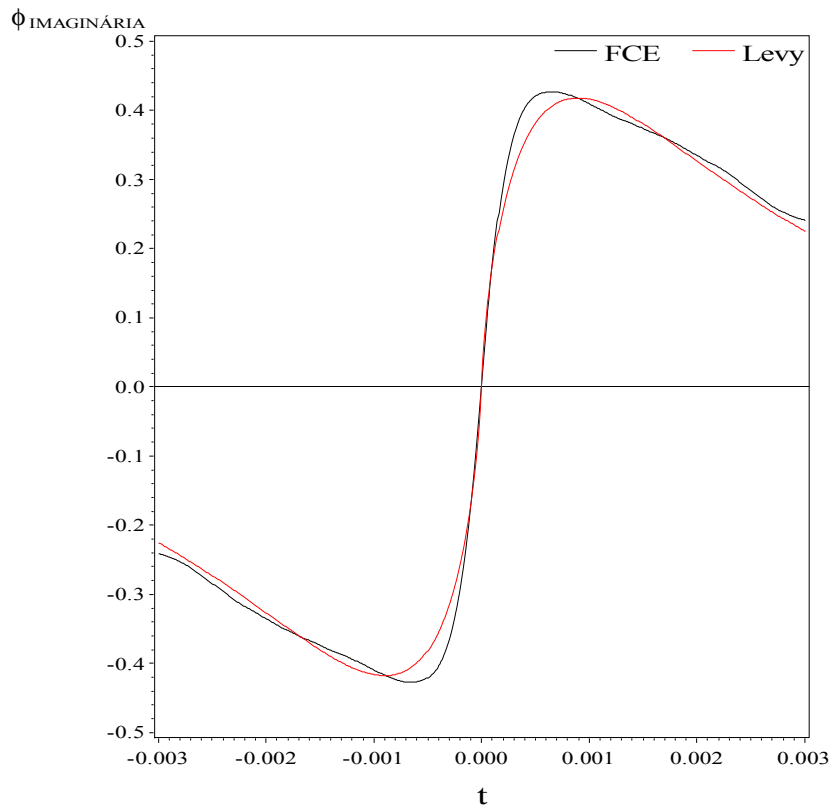


Gráfico 7: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Levy Estabilizada, para a parte Imaginária

Percebe-se que as duas linhas são bem próximas, o que indica um bom ajustamento a partir dos parâmetros estimados. Outra boa forma de identificar o ajustamento, é utilizar o resultado da bondade do ajustamento, que fornece um ajustamento de 99.47% para a parte real e de 93.43% para a parte imaginária.

### 5.5.2 Gamma

Inicialmente, deve-se atentar ao fato de que a fórmula da função característica da Gamma, expandida através de Taylor (2.9), possui o valor “1” como intercepto. Isso não pode ocorrer, pois afeta a condição de regularidade número 7 (condição de posto) de forma a inviabilizar a regressão-não-linear. Para contornar tal problema, será utilizada uma função característica transformada dada por:

$$\varphi_x(t) = \Phi_x(t) - 1 \quad (5.3)$$

Logo, a função utilizada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) = & -\frac{t^2 \Phi_x^{ii}(0)}{2!} + \frac{t^4 \Phi_x^{iv}(0)}{4!} - \frac{t^6 \Phi_x^{vi}(0)}{6!} + \frac{t^8 \Phi_x^{viii}(0)}{8!} - \frac{t^{10} \Phi_x^{x}(0)}{10!} \\ & + \frac{t^{12} \Phi_x^{xii}(0)}{12!} - \frac{t^{14} \Phi_x^{xiv}(0)}{14!} + \frac{t^{16} \Phi_x^{xvi}(0)}{16!} - \frac{t^{18} \Phi_x^{xviii}(0)}{18!} + \frac{t^{20} \Phi_x^{xx}(0)}{20!} \\ & + i \Phi_x^i - i \frac{t^3 \Phi_x^{iii}(0)}{3!} + i \frac{t^5 \Phi_x^v(0)}{5!} - i \frac{t^7 \Phi_x^{vii}(0)}{7!} + i \frac{t^9 \Phi_x^{ix}(0)}{9!} - i \frac{t^{11} \Phi_x^{xi}(0)}{11!} \\ & + i \frac{t^{13} \Phi_x^{xiii}(0)}{13!} - i \frac{t^{15} \Phi_x^{xv}(0)}{15!} + i \frac{t^{17} \Phi_x^{xvii}(0)}{17!} - i \frac{t^{19} \Phi_x^{xix}(0)}{19!} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Visto isso, os parâmetros iniciais foram calculados via momentos (seção 4.4.2) e seus valores, levando em consideração apenas a parte imaginária são:

$$\hat{\alpha} = 1.785938E-30 \quad ;$$

$$\hat{\beta} = -2.596489E14 \quad .$$

Assim como ocorreu quando foram estimados os parâmetros na Levy utilizando somente a parte imaginária, um dos parâmetros estimados para a Gamma também violou

o seu limite (  $\alpha$  e  $\beta$  deve ser maiores que 0 ). Porém, como dito anteriormente, acredita-se que os valores finais irão se manter dentro dos limites.

Utilizando  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , os seguintes resultados foram obtidos na iteração 6:

Nonlinear OLS Summary of Residual Errors							
Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-Square	Adj R-Sq
real	0.5	299.5	52.7304	0.1761	0.4196	-1.5140	-1.5098
imag	0.5	299.5	12.7123	0.0424	0.2060	-6.6050	-6.5923

Nonlinear OLS Parameter Estimates	
Parameter	Estimate
beta	1E-8
alpha	1.41E10

Como esperado, os valores dos dois parâmetros são maiores que 0. Tendo estes valores, ajusta-se a distribuição Gamma e é feita a comparação com a distribuição dada pela função característica empírica. Os gráficos comparativos são os seguintes:

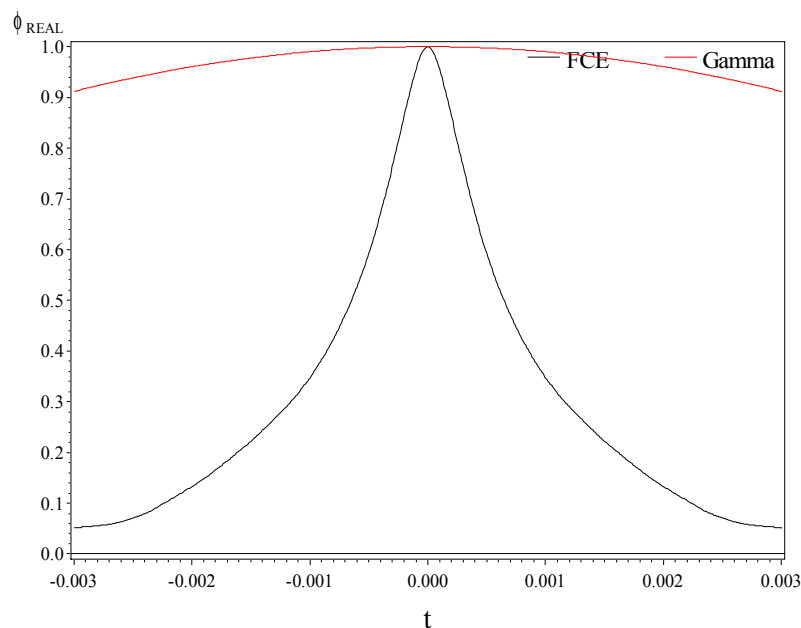


Gráfico 8: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Gamma, para a parte Real

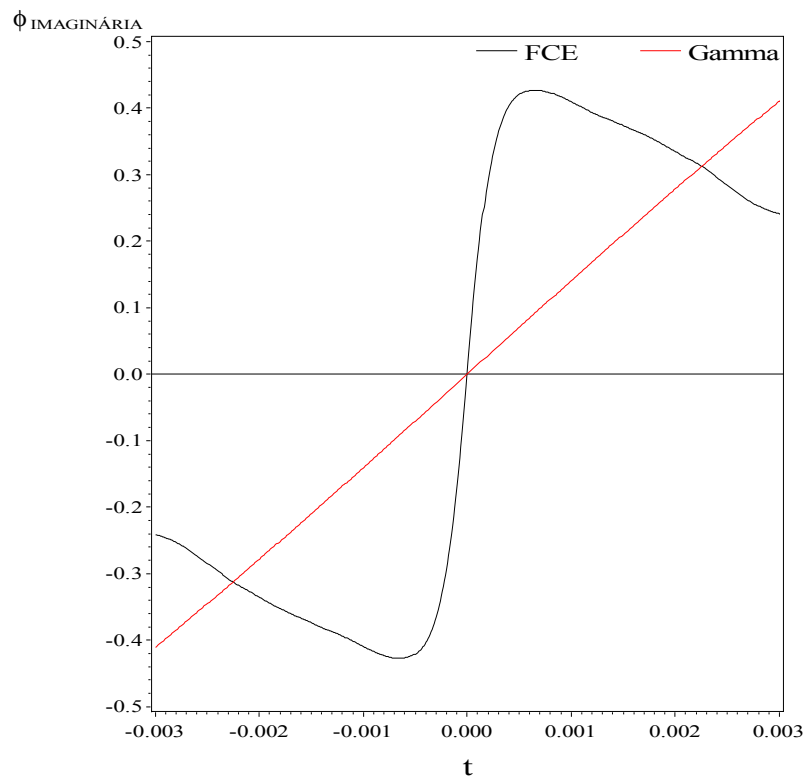


Gráfico 9: Comparativo entre a FCE e a Função Característica da Gamma, para a parte Imaginária

Dados os gráficos e os valores negativos de  $R^2$ , percebe-se que os dados não seguem uma distribuição Gamma.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devido aos avanços computacionais, o método da regressão não-linear é uma boa escolha para a estimação dos melhores parâmetros e para se identificar a distribuição que se ajusta melhor aos dados obtidos empiricamente, através de suas funções densidade de probabilidade ou, como neste estudo, através da função característica. Entretanto, não são todas as distribuições que possuem uma forma para a função característica, da mesma forma que algumas distribuições possuem função característica e não possuem função de distribuição de probabilidade.

Nesse estudo foram utilizadas as distribuições Gamma e Levy Estabilizada. A Levy foi escolhida por ter uma função característica empírica definida e por fornecer um bom ajuste para eventos de cauda pesada (como os eventos de Risco Operacional) e a distribuição Gamma foi escolhida por ser utilizada amplamente pelos bancos, apesar de não ter forma fechada para a função característica empírica.

Utilizando a metodologia do teste de hipóteses, a distribuição Gamma forneceu um bom ajuste: pequenos valores para as estatísticas do teste e os p-valores foram maiores que 0,25 para os testes de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Misses e Anderson-Darling. Porém, é de conhecimento empírico que os eventos de Risco Operacional possuem caudas pesadas que não são identificadas pelo testes de hipóteses, o que gera um problema nesse ajuste.

Para contornar este problema, a regressão não-linear foi utilizada e observou-se, nos gráficos dos dados ajustados com os parâmetros fornecidos pelo método de Gauss-Newton, que a distribuição Gamma não se ajustaria bem aos dados, justamente pelo problema nas caudas. Outros dados que confirmam essa hipótese são os valores relativamente altos do erro quadrático médio: 0.1761 para a parte real e 0.0424 para a parte imaginária. Por outro lado, os dados ajustaram-se bem a distribuição Levy Estabilizada e forneceram erros quadráticos médios baixos (0.000371 para a parte real e 0.000367 para a parte imaginária).

Sendo assim, pode-se dizer que os dados ajustaram-se melhor à uma Levy Estabilizada do que à Gamma e espera-se que a distribuição Levy Estabilizada comece a

fazer parte do portfólio de distribuições dos bancos e que o método da regressão não-linear seja utilizado com mais frequência que o teste de hipóteses.

## REFERÊNCIAS

ANTON, H., 2000. Cálculo, Um Novo Horizonte. 6ª Edição, Porto Alegre: Bookman

ANTONIAZZI, F. O. (2007). Risco Operacional. Monografia (Bacharelado em Estatística) – Universidade de Brasília, Brasília.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Comunicado 12746. 2004.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Resolução 3380. 2006.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework. BIS, 2004.

EPPS, T. W., 1987. Testing that a Gaussian Process is Stationary. The Annals of Statistics 15, páginas 177-203.

EPPS, T. W., 1988. Testing that a Gaussian Process is Stationary. The Annals of Statistics 16, páginas 1667-1683.

FEUERVERGER, A W., MUREIKA, R. A., 1977. The Empirical Characteristic Function and its Applications. The Annals of Statistics 5, páginas 88-97.

GALLANT, A. R., 1987. Nonlinear Statistical Models. New York: John Wiley & Sons.

HARTLEY, H.O. (1961). The Modified Gauss Newton Method for the Fitting of Nonlinear Regression Functions by Least Squares. Technometrics 3, páginas 269-280.

HOEL, P. G. (1978). Introdução à Teoria da Probabilidade. Rio de Janeiro: Interciência.

LEVENBERG. K., 1944. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares. The Quarterly of Applied Mathematics 2, páginas 164–168.

MARQUARDT, D., 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters". SIAM Journal on Applied Mathematics 11, páginas 431–441.

PARZEN, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 33, nº. 3, páginas 1065-1076.

POLITO, A. M. M. (2006). O Método da Função Característica Empírica Aplicado à Dinâmica Molecular de Gases Granulares. Universidade de Brasília, Brasília.

PRESS, S. J. (1972). Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, nº 340, páginas 842-846.

SOUZA, G.S., 1998. Introdução aos Modelos de Regressão Linear e Não-Linear. Brasília: Embrapa.

## APENDICE A – DERIVADAS PARA A EXPANSÃO DE TAYLOR

As derivadas de  $\Phi_x^{(k)}(0)$ , para  $n=1,\dots,20$ , são as seguintes:

$$\Phi_x(t)=1 \quad ;$$

$$\Phi_x^i(t)=i\alpha\beta \quad ;$$

$$\Phi_x^{ii}(t)=-\alpha\beta^2(\alpha+1) \quad ;$$

$$\Phi_x^{iii}(t)=-i\alpha\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2) \quad ;$$

$$\Phi_x^{iv}(t)=\alpha\beta^4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \quad ;$$

$$\Phi_x^v(t)=i\alpha\beta^5(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) \quad ;$$

$$\Phi_x^{vi}(t)=-\alpha\beta^6(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5) \quad ;$$

$$\Phi_x^{vii}(t)=-i\alpha\beta^7(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6) \quad ;$$

$$\Phi_x^{viii}(t)=\alpha\beta^8(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7) \quad ;$$

$$\Phi_x^{ix}(t)=i\alpha\beta^9(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8) \quad ;$$

$$\Phi_x^x(t)=-\alpha\beta^{10}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xi}(t)=-i\alpha\beta^{11}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xii}(t)=\alpha\beta^{12}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xiii}(t)=i\alpha\beta^{13}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6) \quad ;$$

$$(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xiv}(t)=-\alpha\beta^{14}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6) \quad ;$$

$$(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xv}(t)=-i\alpha\beta^{15}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6) \quad ;$$

$$(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xvi}(t)=\alpha\beta^{16}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7) \quad ;$$

$$(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14)(\alpha+15) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xvii}(t)=i\alpha\beta^{17}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8) \quad ;$$

$$(\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14)(\alpha+15)(\alpha+16) \quad ;$$

$$\Phi_x^{xviii}(t) = -\alpha \beta^{18} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8) \cdot \\ (\alpha+9)(\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14)(\alpha+15)(\alpha+16)(\alpha+17) ;$$

$$\Phi_x^{xix}(t) = -i \alpha \beta^{19} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9) \cdot \\ (\alpha+10)(\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14)(\alpha+15)(\alpha+16)(\alpha+17)(\alpha+18) ;$$

$$\Phi_x^{xx}(t) = \alpha \beta^{20} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)(\alpha+6)(\alpha+7)(\alpha+8)(\alpha+9)(\alpha+10) \cdot \\ (\alpha+11)(\alpha+12)(\alpha+13)(\alpha+14)(\alpha+15)(\alpha+16)(\alpha+17)(\alpha+18)(\alpha+19) .$$

## ANEXO A – PROGRAMAÇÃO EM SAS PARA CÁLCULO DOS PARÂMETROS E AJUSTE VIA REGRESSÃO NÃO-LINEAR

```

/***** INÍCIO DO PROGRAMA *****/
/***** MONTAGEM DA BASE *****/

%macro empirica(dados,saida,t,div);

data dados_empiricos;
  set base.base_final;
  t = &t/&div;
  real = cos(t*valor_ajustado);
  imag = sin(t*valor_ajustado);
run;

proc means data=dados_empiricos noprint;
  var real imag;
  id t;
  output out=dados;
run;

data dados_means;
  set dados;
  if _STAT_='MEAN' then output;
run;

data &saida;
  set &saida dados_means;
run;

%Mend;

%macro Loop;
options notes=0;
options source=0;
data caracteristica;
run;
  %do QQ = -300 %to 300;
    %empirica(dados_empiricos,caracteristica,&QQ,100000);
  %put &QQ;
  %end;
options notes=1;
options source=1;
%Mend;
%loop;

data caracteristica;
  set base.caracteristica;
  if t = ' ' then delete;
run;

/***** GRÁFICO DOS VALORES REAIS E IMAGINÁRIOS DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA *****/

symbol1 I=join V=none C=black H=1 R=1;
axis1 value =(Font=times Height=2)
  label = ( Font=symbol Height=3 'f' Font=times Height=1.5 'REAL');

axis2 value =(Font=times Height=2)

```

```

label = ( Font=times Height=3 't');
axis3 value = (Font=times Height=2)
label = (Font=symbol Height=3 'f' Font=times Height=1.5 'IMAGINÁRIA');

legend1 label=none value=(Height=2.5 Font=times 'FCE' 'Gamma')
position=(top right inside) mode=share;

legend2 label=none value=(Height=2.5 font=times 'FCE' 'Levy')
position=(top right inside) mode=share;

proc gplot data=caracteristica;
plot real*t=1/vref=0 vaxis=axis1 haxis=axis2;
plot imag*t=1/vref=0 vaxis=axis3 haxis=axis2;
run;
quit;

/*****
/*****
/**** VERIFICAÇÃO SE A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA SEGUE UMA GAMMA ****/
/*****
/*****

proc means data=caracteristica noprint nway sum mean;
var real imag;
output out = par_gamma mean(real)=media_real mean(imag)=media_imag
var(real)=var_real var(imag)=var_imag;
run;

data parametros_gamma;
set par_gamma;
beta_real = var_real/media_real;
alpha_real = media_real/beta_real;
beta_imag = var_imag/media_imag;
alpha_imag = media_imag/beta_imag;
drop _TYPE_ _FREQ_;
run;
data _null_;
set parametros_gamma;
call symput ('alpha3',alpha_imag);
call symput ('beta3',beta_imag);
run;

proc model data=Caracteristica outparms=param_gamma maxiter=32000
converge=0.00001;
where t>0;
parms beta=&beta3 alpha=&alpha3;
phi_1 = alpha*beta;
phi_2 = alpha * (beta**2) * (alpha+1);
phi_3 = alpha * (beta**3) * (alpha+1) * (alpha+2);
phi_4 = alpha * (beta**4) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3);
phi_5 =alpha*(beta**5) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) * (alpha+4);
phi_6 = alpha
* (beta**6) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) * (alpha+4) * (alpha+5);
phi_7 = alpha * (beta**7) * (alpha+1) * (alpha+2) *
(alpha+3) * (alpha+4) * (alpha+5) * (alpha+6);
phi_8 = alpha * (beta**8) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) *
(alpha+4) * (alpha+5) * (alpha+6) * (alpha+7);
phi_9 = alpha * (beta**9) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) *
(alpha+4) * (alpha+5) * (alpha+6) * (alpha+7) * (alpha+8);
phi_10 = alpha * (beta**10) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) *
(alpha+4) * (alpha+5) * (alpha+6) * (alpha+7) * (alpha+8) * (alpha+9);
phi_11 = alpha * (beta**11) * (alpha+1) * (alpha+2) * (alpha+3) *

```

```

(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*
(alpha+9)*(alpha+10);
phi_12 = alpha * (beta**12)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11);
phi_13 = alpha * (beta**13)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12);
phi_14 = alpha * (beta**14)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13);
phi_15 = alpha * (beta**15)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14);
phi_16 = alpha * (beta**16)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14)*
(alpha+15);
phi_17 = alpha * (beta**17)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14)*
(alpha+15)*(alpha+16);
phi_18 = alpha * (beta**18)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14)*
(alpha+15)*(alpha+16)*(alpha+17);
phi_19 = alpha * (beta**19)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14)*
(alpha+15)*(alpha+16)*(alpha+17)*(alpha+18);
phi_20 = alpha * (beta**20)*(alpha+1)*(alpha+2)*(alpha+3)*
(alpha+4)*(alpha+5)*(alpha+6)*(alpha+7)*(alpha+8)*(alpha+9)*
(alpha+10)*(alpha+11)*(alpha+12)*(alpha+13)*(alpha+14)*
(alpha+15)*(alpha+16)*(alpha+17)*(alpha+18)*(alpha+19);
real =
    -((t**2)*phi_2)/fact(2) + ((t**4)*phi_4)/fact(4)
    -((t**6)*phi_6)/fact(6) + ((t**8)*phi_8)/fact(8)
    -((t**10)*phi_10)/fact(10) +
    ((t**12)*phi_12)/fact(12)
    -((t**14)*phi_14)/fact(14) +
    ((t**16)*phi_16)/fact(16)
    -((t**18)*phi_18)/fact(18) +
    ((t**20)*phi_20)/fact(20);
imag =
    (t*phi_1) - ((t**3)*phi_3)/fact(3) + ((t**5)*phi_5)/
    fact(5) - ((t**7)*phi_7)/fact(7) +
    ((t**9)*phi_9)/fact(9)
    -((t**11)*phi_11)/fact(11) +
    ((t**13)*phi_13)/fact(13)
    -((t**15)*phi_15)/fact(15) +
    ((t**17)*phi_17)/fact(17)
    -((t**19)*phi_19)/fact(19);

fit real imag;
bounds alpha>0;
bounds beta>0;

run;
quit;

data _null_;
set param gamma;
call symput ('beta4',beta);
call symput ('alpha4',alpha);
keep beta alpha;;

run;

```

```

/*****
/*****
/*AJUSTE PARA VERIFICAR SE A GAMMA ESTIMADA É IGUAL A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA
EMPÍRICA*/
/*****
/*****

```

```

data ajuste_gamma;
  set Caracteristica;
    phi_1 = &alpha4*&beta4;
    phi_2 = &alpha4 * (&beta4**2) * (&alpha4+1);
    phi_3 = &alpha4 * (&beta4**3) * (&alpha4+1) * (&alpha4+2);
    phi_4 = &alpha4 * (&beta4**4)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3);
    phi_5 = &alpha4 * (&beta4**5)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4);
    phi_6 = &alpha4 * (&beta4**6)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5);
    phi_7 = &alpha4 * (&beta4**7)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5)
    * (&alpha4+6);
    phi_8 = &alpha4 * (&beta4**8)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7);
    phi_9 = &alpha4 * (&beta4**9)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8);
    phi_10 = &alpha4 * (&beta4**10)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9);
    phi_11 = &alpha4 * (&beta4**11)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10);
    phi_12 = &alpha4 * (&beta4**12)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10)
    * (&alpha4+11);
    phi_13 = &alpha4 * (&beta4**13)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12);
    phi_14 = &alpha4 * (&beta4**14)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13);
    phi_15 = &alpha4 * (&beta4**15)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14);
    phi_16 = &alpha4 * (&beta4**16)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14) *
    (&alpha4+15);
    phi_17 = &alpha4 * (&beta4**17)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14) *
    (&alpha4+15) * (&alpha4+16);
    phi_18 = &alpha4 * (&beta4**18)
    * (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
    (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
    (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14) *

```

```

    (&alpha4+15) * (&alpha4+16) * (&alpha4+17);
    phi_19 = &alpha4 * (&beta4**19)
* (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
  (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
  (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14) *
  (&alpha4+15) * (&alpha4+16) * (&alpha4+17) * (&alpha4+18);
    phi_20 = &alpha4 * (&beta4**20)
* (&alpha4+1) * (&alpha4+2) * (&alpha4+3) * (&alpha4+4) * (&alpha4+5) *
  (&alpha4+6) * (&alpha4+7) * (&alpha4+8) * (&alpha4+9) * (&alpha4+10) *
  (&alpha4+11) * (&alpha4+12) * (&alpha4+13) * (&alpha4+14) *
  (&alpha4+15) * (&alpha4+16) * (&alpha4+17) * (&alpha4+18) *
  (&alpha4+19);
    ajuste_real = 1 - ((t**2)*phi_2)/fact(2) +
  ((t**4)*phi_4)/fact(4)
  - ((t**6)*phi_6)/fact(6) +
  ((t**8)*phi_8)/fact(8)
  - ((t**10)*phi_10)/fact(10) +
  ((t**12)*phi_12)/fact(12)
  - ((t**14)*phi_14)/fact(14) +
  ((t**16)*phi_16)/fact(16)
  - ((t**18)*phi_18)/fact(18) +
  ((t**20)*phi_20)/fact(20);
    ajuste_imag = (t*phi_1) - ((t**3)*phi_3)/fact(3) +
  ((t**5)*phi_5)/fact(5)
  - ((t**7)*phi_7)/fact(7) +
  ((t**9)*phi_9)/fact(9)
  - ((t**11)*phi_11)/fact(11) +
  ((t**13)*phi_13)/fact(13)
  - ((t**15)*phi_15)/fact(15) +
  ((t**17)*phi_17)/fact(17)
  - ((t**19)*phi_19)/fact(19);

run;

symbol2 I=join V=none C=red H=1 R=1;
proc gplot data=ajuste_gamma;
  plot real*t=1 ajuste_real*t=2/overlay vref=0 vaxis=axis1 haxis=axis2
  legend=legend1;
  plot imag*t=1 ajuste_imag*t=2/overlay vref=0 vaxis=axis3 haxis=axis2
  legend=legend1;
run;
quit;

/*****
/*****
/* VERIFICAÇÃO SE A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EMPÍRICA SEGUE UMA LEVY */
/*****
/*****

/**** Escolha de t1, t2, t3 e t4 com base nos gráficos ****/
/*t1=0.0001*/
/*t2=0.001*/
/*t3=0.0015*/
/*t4=0.0025*/

data t;
  set caracteristica;
  if t = 0.0001 then do;
    call symput ('t1',t);
    call symput ('cos_t1',real);
    call symput ('sen_t1',imag);
  end;
  if t = 0.001 then do;
    call symput ('t2',t);

```

```

        call symput ('cos_t2',real);
        call symput ('sen_t2',imag);
    end;
    if t = 0.0015 then do;
        call symput ('t3',t);
        call symput ('cos_t3',real);
        call symput ('sen_t3',imag);
    end;
    if t = 0.0025 then do;
        call symput ('t4',t);
        call symput ('cos_t4',real);
        call symput ('sen_t4',imag);
    end;
    if
        t = 0.0001
    or
        t = 0.001
    or
        t = 0.0015
    or
        t = 0.0025;
    keep t real imag;
run;

/**** Cálculo dos parâmetros segundo o método dos momentos definido por Press
(1972) ****/

data u;
    set t;
    u_t3 = atan(&sen_t3/&cos_t3);
    u_t4 = atan(&sen_t4/&cos_t4);
    if _N_ = 1;
    keep u_t3 u_t4;
    call symput ('u_t3', u_t3);
    call symput ('u_t4', u_t4);
run;

data parametros_estimados_momentos;
    set u t;
    pi=arcos(-1);
    alpha_real =(log(abs(log(abs(&cos_t1))/(log(abs(&cos_t2))))) /
        (log(abs(&t1/&t2))));
    alpha_imag =(log(abs(log(abs(&sen_t1))/(log(abs(&sen_t2))))) /
        (log(abs(&t1/&t2))));
    log_gamma_real = (log(abs(&t1))*log(-log(abs(&cos_t2))) -
        log(abs(&t2))*log(-log(abs(&cos_t1))))/log(abs(&t1/&t2));
    log_gamma_imag = (log(abs(&t1))*log(-log(abs(&sen_t2))) -
        log(abs(&t2))*log(-log(abs(&sen_t1))))/log(abs(&t1/&t2));
    delta_real = exp((log_gamma_real)/alpha_real);
    delta_imag = exp((log_gamma_imag)/alpha_imag);
    beta_real = (abs(&u_t3/&t3)-(&u_t4/&t4)) /
        ((abs(&t4)**(alpha_real-1)-
        (abs(&t3)**(alpha_real-1)))*(exp(log_gamma_real))*
        tan(pi*alpha_real/2));
    beta_imag = (abs(&u_t3/&t3)-(&u_t4/&t4)) /
        ((abs(&t4)**(alpha_imag-1)-
        (abs(&t3)**(alpha_imag-1)))*(exp(log_gamma_imag))*
        tan(pi*alpha_imag/2));
    a_real =
        (((abs(&t4)**(alpha_real-1))*&u_t3/&t3) -
        (((abs(&t3)**(alpha_real-1))*&u_t4/&t4))/((abs(&t4))
        *(alpha_real-1)-(abs(&t3)**(alpha_real-1)));
    a_imag =
        (((abs(&t4)**(alpha_imag-1))*&u_t3/&t3) -
        (((abs(&t3)**(alpha_imag-1))*&u_t4/&t4))/((abs(&t4))**
        (alpha_imag-1)-(abs(&t3)**(alpha_imag-1)));
    if _N_ = 1;
    keep alpha_real alpha_imag delta_real delta_imag beta_real beta_imag
a_real a_imag;
run;

```

```

data _null_;
  set parametros estimados momentos;
  call symput ('alpha1',alpha_imag);
  call symput ('delta1',delta_imag);
  call symput ('beta1',beta_imag);
  call symput ('a1',a_real);
run;

proc model data=caracteristica outparms=par_levy maxiter=32000 converge=0.00001;
where t>0;
  parms beta=&beta1 a=&a1 alpha=&alpha1 delta=&delta1;
  pi=arcsos(-1);
  if alpha=1 then Omega =(2/pi)*log(t);
  else Omega = tan(pi*alpha/2);
  B = - beta*omega*((t*delta)**alpha);
  R = exp(-(t*delta)**alpha);
  real = R*cos(a*t+B);
  imag = R*sin(a*t+B);
  fit real imag;
  bounds -1 <= beta <= 1;
  bounds 0 < alpha <= 2;
  bounds delta >= 0;

run;
quit;

data _null_;
  set par_levy;
  call symput ('beta2',beta);
  call symput ('a2',a);
  call symput ('alpha2',alpha);
  call symput ('delta2',delta);
run;

/*****
/*****
/*AJUSTE PARA VERIFICAR SE A LEVY ESTIMADA É IGUAL A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA
EMPÍRICA*/
/*****
/*****

data ajuste_levy;
  set caracteristica;
  pi=arcsos(-1);
  beta=&beta2;
  a=&a2;
  alpha=&alpha2;
  delta=&delta2;
  if alpha=1 then Omega=(2/pi)*log(abs(t));
  else Omega = tan(pi*alpha/2);
  B = -beta*omega*(t/abs(t))*(abs(t*delta)**alpha);
  R = exp(-(abs(t*delta)**alpha));
  ajuste_real = R*cos(a*t+B);
  ajuste_imag = R*sin(a*t+B);

run;

symbol2 I=join V=none C=red H=1 R=1;
proc gplot data=ajuste_levy;
  plot real*t=1 ajuste_real*t=2/overlay vref=0 vaxis=axis1 haxis=axis2
  legend=legend2;
  plot imag*t=1 ajuste_imag*t=2/overlay vref=0 vaxis=axis3 haxis=axis2
  legend=legend2;
run;
quit;
/***** FIM DO PROGRAMA *****/

```